

19/5/21

Τετραγωνικές μορφές Συνέχεια...

$Q: V \rightarrow \mathbb{R} \quad V^n = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad \delta. x. \quad V \in V \Rightarrow V = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

$$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Συνήθως γράφουμε τη τετραγωνική μορφή $Q(v) = (x_1, \dots, x_n) A (x_1, \dots, x_n)^t$
 $(Q(v)) = (x_1, \dots, x_n) A (x_1, \dots, x_n)^t \quad A = (a_{ij})$. Προσπαθούμε ο A
 να είναι συμμετρικός ώστε να διαγωνοποιείται

Καμπύλες Δεύτερου βαθμού

Καμπύλες στο επίπεδο. Οι συντελεστές ενός σημείου (x, y) μιας καμπύλης 2^{ου} βαθμού ικανοποιούν μια εξίσωση μορφής:

$$\overbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2}^{\text{βαθμίου 2}} + \overbrace{dx + ey}^{\text{βαθμίου 1}} = f$$

Εδώ τα a, b, c, d, e, f είναι συγκεκριμένοι αριθμοί

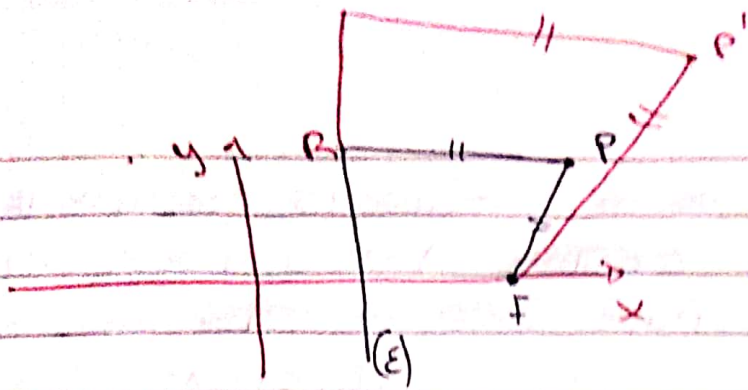
Γνωστές καμπύλες στο επίπεδο

1) $y = ax^2 \rightarrow y = ax^2 + bx + f$ (Η γενικεύει της) Παραβολή

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Υπερβολή

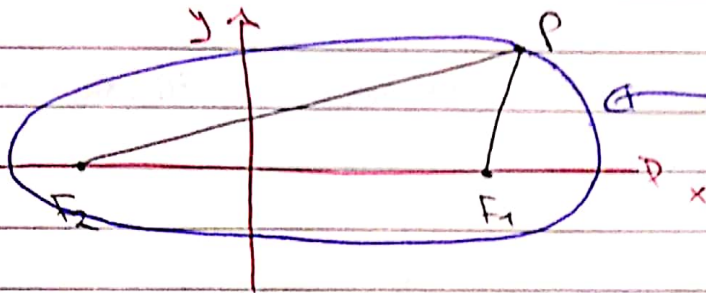
3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Έλλειψη

1) Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος, το σύνολο των σημείων του επιπέδου P για τα οποία ισχύει ότι η απόσταση από σταθερό σημείο F ισούται με την απόσταση από κάποιο συγκεκριμένο ευθεία (ϵ)



$\|PF\| = \|PP'\| \rightarrow \text{Παράβολο!}$
 $y = ax^2 + bx + c$

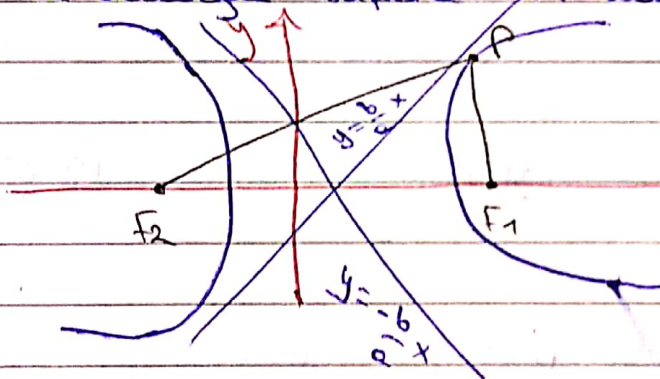
3) Έλλειψη: Συμμετρικών το σημείο P για το οποίο ισχύει ότι το άθροισμα των αποστάσεων από 2 σταθερά σημεία F_1 και F_2



$\|PF_1\| + \|PF_2\| = \text{σταθερή}$

← Έλλειψη

2) Υπερβολή: Συμμετρικών το σημείο P για το οποίο ισχύει ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του P από 2 σταθερά σημεία F_1 και F_2 είναι σταθερή



$\|PF_2\| - \|PF_1\| = \text{σταθ.}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

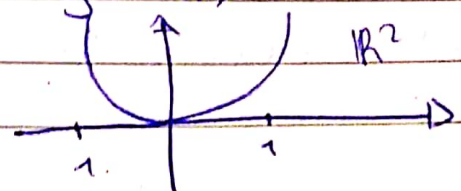
Πχ: Σχεδιάστε την καμπύλη $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$

$Q(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$: τετραγωνική μορφή

$z = Q(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$: η γραμμή της παράστασης

$y = f(x)$ η γραμμ. παράστασης είναι υποσύνολο του επιπέδου και περιέχει όλο το σημείο (x,y) ώστε $y = f(x)$

Πχ: $y = x^2$



η & z για στον $\mathbb{R}^3$. Για να τα σχεδιάσουμε χρησιμοποιούμε να σχεδιάσουμε τα επίπεδα σταθμούς. Αν η μ έχει για ~~αξία~~ συγκεκριμένο z . Αυτό δίνει τη τομή της φθαρμένης παράστασης με το επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο xy σε ύψος z_0 .

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8 \Rightarrow (x, y) \begin{pmatrix} 5 & -6/2 \\ -6/2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6/2 \\ -6/2 & 5 \end{pmatrix} \text{ γραμ. αλλη} \Rightarrow \text{ιδιοτιμές } 2 \text{ και } 8 \rightarrow \text{διαγωνοποιείται}$$

$$\rightarrow V(2) = \angle (1, 1) = \angle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ και}$$

$$V(8) = \angle (-1, 1) = \angle \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$A = P \Lambda P^t, \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8 \Rightarrow (x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \Rightarrow (x, y) P \Lambda P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8$$

$$\text{Ορίζουμε } (x', y') = (x, y) P \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \end{cases}$$

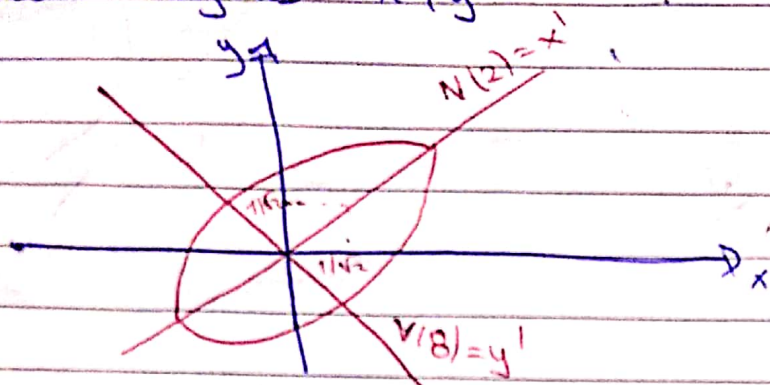
(+)

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8 \Rightarrow (x', y') \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t = 8 \Rightarrow 2(x')^2 + 8(y')^2 = 8$$

$$\boxed{2(x')^2 + 8(y')^2 = 8} \quad (*)$$

$$(*) \stackrel{8}{=} 0 \quad \frac{1}{4} (x')^2 + (y')^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{x'}{2}\right)^2 + (y')^2 = 1 \text{ είναι έλλειψη}$$

στους άξονες x', y' .



Πρέπει να τονοθετήσουμε τους νέους άξονες x', y'

Θέτουμε $x'=1$ και $y'=0$

και βρίσκουμε από τη

σχέση $(+)$ τα x και y

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{2}{\sqrt{2}}y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{και: } \frac{1}{\sqrt{2}}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Παρατηρώ ότι τα x, y που βρίσκω είναι ο ιδιοχώρος του ιδιοτιμής $\lambda_1=2$ ($=0$ άξονες x')

Αντίστοιχα y' είναι ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda_2=8$

Π.χ: Να σχεδιάσετε την καμπύλη $7x^2 - 12xy - 2y^3 = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \text{ ιδιοτιμές } \lambda_1 = -5 \text{ και } \lambda_2 = 10 \Rightarrow \text{υπερβολή}$$

$$Q(x,y) = Q(x',y') = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = -5(x')^2 + 10(y')^2$$

$$-5(x')^2 + 10(y')^2 = 3 \Rightarrow \frac{-5}{3}(x')^2 + \frac{10}{3}(y')^2 = 1 \Rightarrow \text{υπερβολή}$$

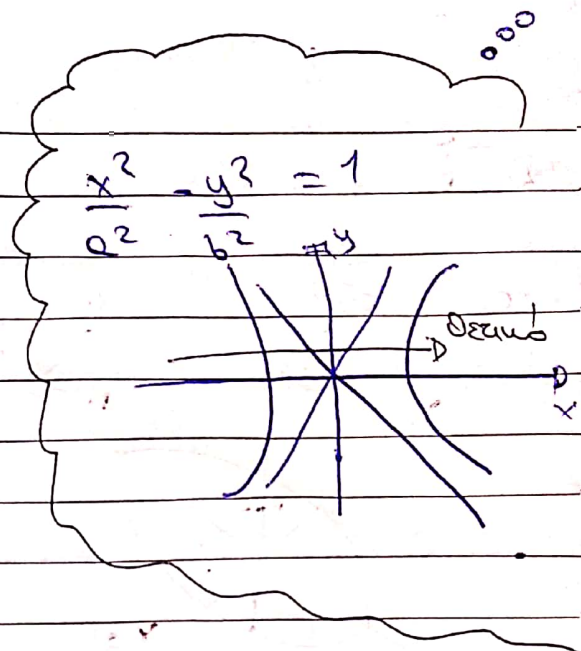
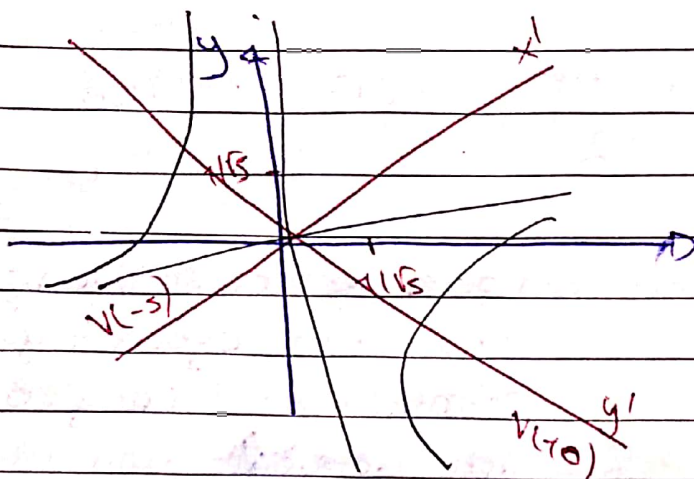
στους x', y'

Οι νέοι άξονες δίνονται από τους ιδιοχώρους $V(-5)$ και $V(10)$

$$V(-5) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ και } V(10) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Ο πίνακας μεταβάσεως } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(x', y') = (x, y)P \Rightarrow x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y), y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y)$$



Π.Χ: Να σχεδιάσετε την καμπύλη $2x^2 + 4xy - y^2 + 4x - 2y = -5$
 ≡ εικωνώ με των
 ↓ τετραγωνισμό
 $Q(x,y) = 2x^2 + 4xy - y^2$

Q: $2=0$ βασικά τετραγωνισμό

Li ηρωτα βασικά

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Ιδιοτιμές } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2 \rightarrow \text{Ιδιόχωρος}$$

Θα έχουμε υποβασλή. Το θεμε είναι που βρίσκεται?

$$V(3) = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle, V(-2) = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$(x', y') = (x, y) P \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{cases}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y$$

$$(x, y) = (x', y') P^{-1} = (x', y') P^t \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 4x - 2y = -5 \Rightarrow 3(x')^2 - 2(y')^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)$$

$$- 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) = -5 \Rightarrow 3(x')^2 - 2(y')^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x' - \frac{8}{\sqrt{5}}y' = -5$$

(Πρέπει με κάποιο τρόπο να εξαφανίσω το ηρωταδόθεμα
Για τη φραση παρ. θέλω είτε μόνο 2^{∞} ή είτε μόνο 1^{∞} &)

$$\begin{aligned} 3(x')^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x' &= 3\left((x')^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}x'\right) = 3\left((x')^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right) \\ &= 3\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2(y')^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}y' &= -2\left((y')^2 + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) = -2\left((y')^2 + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\right) \\ &= -2\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$(*) \Rightarrow 3\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{3}{5} + \frac{8}{5} = -5 \Rightarrow$$

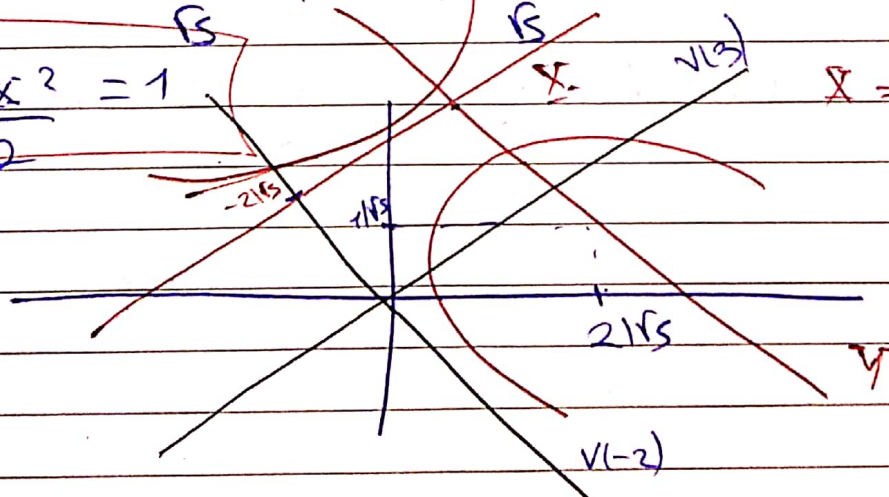
$$\Rightarrow 3\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = -6$$

Ορίζουμε:

$$X = x' + \frac{1}{\sqrt{5}}, Y = y' + \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow 3X^2 - 2Y^2 = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y^2}{3} - \frac{X^2}{2} = 1$$

$$X = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}Y$$



$$X = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}Y$$

Διερεύνηση Δευτεροβάθμιου Εξίσωσης στο Επίπεδο

α) Μέρος: $ax^2 + 2bxy + cy^2 = F$

Με κατάλληλη αλλαγή βάσης μένω να πινω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

και των ιδιοχώρων, τα μετασχηματίζουμε στην

απλούστερη: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = f$

Το σχήμα της καμπύλης εξαρτάται από τα πρόσημα των λ_1, λ_2, f

1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ α) $f = 0 \rightarrow$ ευθεία

β) $\lambda_2 < 0$ (ετερόσημες) $\rightarrow$ υπερόκλιση

γ) $\lambda_2 > 0$ (ομόσημες) $\rightarrow$ 2 ευθείες

Π.χ.: $3(y')^2 = 0 \Rightarrow y' = 0, x' \in \mathbb{R}$

Π.χ.: $-3(y')^2 = z \Rightarrow$ Αδύνατο

Π.χ.: $-3(y')^2 = -z \Rightarrow 3(y')^2 - z = 0 \Rightarrow (y')^2 - \left(\sqrt{\frac{z}{3}}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow y' - \sqrt{\frac{z}{3}} = 0$ και $y' + \sqrt{\frac{z}{3}} = 0, x' \in \mathbb{R}$

Η μία καθορίζεται από την $y' = \sqrt{\frac{z}{3}}$ και $x' \in \mathbb{R}$

και η άλλη από την $y' = -\sqrt{\frac{z}{3}}$ και $x' \in \mathbb{R}$

2) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ και $f = 0$ π.χ. $(x')^2 - 3(y')^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $(x' - \sqrt{3}y')(x' + \sqrt{3}y') = 0 \Rightarrow x' = \sqrt{3}y' \text{ , } x' = -\sqrt{3}y'$
 Μια ευθεία $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'$, $y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}x'$ 2 ευθείες

3) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ και $f < 0$ π.χ. $(x')^2 + 3(y')^2 = -\varepsilon$ μηδὲν
 αδύνατο

4) λ_1, λ_2 και $f > 0$ π.χ. $(x')^2 + 3(y')^2 = \varepsilon$ ἑλλειψι

5) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ και $f > 0$ π.χ. $-(x')^2 + 3(y')^2 = \varepsilon$
 ἑτερόσημες ιδιοτιμές υπερβολή $(x')^2 - 3(y')^2 = \varepsilon$

6) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ και $f = 0$ π.χ. $-(x')^2 - 3(y')^2 = 0 \Rightarrow (x')^2 + 3(y')^2 = 0$
 $x' = 0 = y'$ ένα σημείο

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = f$

Πρώτα μελετάμε το τετραγωνικό μέρος, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ με τον $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ και το γράφουμε στη μορφή:

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$ με την κατάλληλη βάση μέσω των ιδιοτιμών.

$A = P \Lambda P^t$, γνωρίζουμε ότι $(x', y') = (x, y)P \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x, y) = (x', y')P^t$

Αντικαθιστούμε στην $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + dx + ey = f$ το x, y
 με x', y' και τη γράφουμε στη μορφή $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + kx' +$
 $+ ly' = f$

Συμπληρώνουμε το αντίστοιχο τέλει τετράγωνο και
 γίνεται $\lambda_1(x' + k')^2 + \lambda_2(y' + l') = f'$

Αλλάζουμε πάλι τους άξονες : $X = x' + k'$ και $Y = y' + l'$
 και λαμβάνει την τελική μορφή : $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = f'$

Χρησιμοποιώντας τις αλλαγές που έχουμε κάνει στους άξονες
 $(x, y) \rightarrow (x', y') \rightarrow (x, y)$ σχεδιάζουμε τον καμπύλιμο